Martin Gwildies <Martin_Gwildies@gmx.net>

Die Differentialgleichung der gedämpften elektromagnetischen Schwingung

Ansatz:
Werden die Widerstände der Leiterbahnen vernachlässigt („idealer Schwingkreis“), bleibt die Summe der Beträge beider Spannungen auf Grund des Energieerhaltungssatzes konstant.

(Bild: idealer Schwingkreis)

$U_C = -U_L \quad \Rightarrow \quad U_C + U_L = 0$

Ebenfalls aus dem Energieerhaltungsatz erhält man den Ansatz für die Differentialgleichung der gedämpften elektromagnetischen Schwingung:

Ersatzschaltbild für den realen Schwingkreis (R$\neq 0$):

(Bild: realer Schwingkreis)

$U_R + U_C = -U_L$

$U_R + U_C + U_L = 0$ (Gleichung 1a)

Aus $R = \frac{U}{I}$ folgt für U_R : $U_R = R \cdot I$ (Gleichung 1b)

Aus $C = \frac{Q}{U}$ folgt für U_C : $\frac{Q}{C}$ (Gleichung 1c)

Aus dem Induktionsgesetz geht hervor: $U_L = L \cdot \dot{I}$ (Gleichung 1d)

Durch Einsetzen der [Gleichungen 1b, 1c, 1d] in die [Gleichung 1a] erhält man die Gleichung :

$R \cdot I + \frac{Q}{C} + L \cdot \dot{I} = 0$ (Gleichung 2a)

Da für I gilt : $I = \dot{Q}$ bzw. $\dot{I} = \ddot{Q}$, folgt für die Differentialgleichung:

$R \cdot \dot{Q} + \frac{Q}{C} + L \cdot \ddot{Q} = 0$ (Gleichung 2b)

Jede gedämpfte harmonische Schwingung läßt sich durch eine Gleichung der Form
$y = e^{-k \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ beschreiben.

Da in diesem Fall elektrische Ladungen schwingen, ergibt sich daraus der Lösungsansatz für die Differentialgleichung:

$$Q(t) = Q_0 \cdot e^{-k \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{Q}(t) = Q_0 \cdot e^{-k \cdot t} (\omega \cdot \cos(\omega \cdot t) - k \cdot \sin(\omega \cdot t))$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{Q}(t) = Q_0 \cdot e^{-k \cdot t} (-k \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) + k^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) - \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) - k \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t))$$

Ziel: ω und k sollen durch gegebene Werte (R, C und L) berechnet werden können.

Durch Einsetzen dieser Terme in [Gleichung 2b] entsteht die Gleichung :

$$
\begin{aligned}
0 = Q_0 \cdot e^{-k\cdot t} \quad (\quad & \frac{1}{C}\cdot\sin(\omega\cdot t) && + && R\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t) \\
& - R\cdot k\cdot\sin(\omega\cdot t) && - && L\cdot k\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t) \\
& + L\cdot k^2\cdot\sin(\omega\cdot t) && - && L\cdot k\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t) \\
& - L\cdot k\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t) && &&)
\end{aligned}
$$

Durch Zusammenfassen der Gleichung erhält man:

$$
\begin{aligned}
0 = Q_0 \cdot e^{-k\cdot t} \cdot (&\frac{1}{C}\cdot\sin(\omega\cdot t) + R\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t) - R\cdot k\cdot\sin(\omega\cdot t) \\
& - 2\cdot L\cdot k\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t) + L\cdot k^2\cdot\sin(\omega\cdot t) - L\cdot\omega^2\cdot\sin(\omega\cdot t))
\end{aligned}
$$

Da $Q_{0.}e^{-k\cdot t}$ für den zu beobachtenden Zeitraum stets ungleich 0 ist, können wir beide Seiten der Gleichung durch $Q_{0.}e^{-k\cdot t}$ dividieren.
Die dann entstehende Gleichung ist nur dann erfüllt, wenn gleichzeitig gilt:

1) $\sin(\omega\cdot t)\cdot(\frac{1}{C} - R\cdot k + L\cdot k^2 - L\cdot\omega^2) = 0$ (Gleichung 3a)

2) $\cos(\omega\cdot t)\cdot(R\cdot\omega - 2\cdot L\cdot k\cdot\omega) = 0$ (Gleichung 3b)

Da $\sin(\omega\cdot t)$ und $\cos(\omega\cdot t)$ nie gleichzeitig null sind, genügt es, den jeweils anderen Faktor nullzusetzen.
Aus der Gleichung 3b kann bereits ein Ausdruck für die „k“ gefunden werden:

$(R\cdot\omega - 2\cdot L\cdot k\cdot\omega) = 0$ | ω ausklammern

$\omega\cdot(R - 2\cdot L\cdot k) = 0$

$\Rightarrow\; k = \frac{R}{2L}$ (Gleichung 4)

Einen Term für die Frequenz „f“ erhält man aus [Gleichung 3a]:

$\frac{1}{C} - R\cdot k + L\cdot k^2 - L\cdot\omega^2) = 0$ | $\cdot\frac{1}{L}$ nach ω^2 umstellen

$\omega^2 = \frac{1}{L\cdot C} + k^2 - \frac{R}{L}\cdot k$ | für k [Gleichung 4] einsetzen

$\omega^2 = \frac{1}{L\cdot C} + \frac{R^2}{4\cdot L^2} - \frac{R^2}{2\cdot L^2}$ | $\sqrt{}$

$\omega = \sqrt{\frac{1}{L\cdot C} - \frac{R^2}{4\cdot L^2}}$ | $\omega = 2\cdot\pi\cdot f$

$f = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{L\cdot C} - \frac{R^2}{4\cdot L^2}}$

Anmerkung zum Referat: Sollten zu diesem Referat Fragen auftauchen, können diese jederzeit an mich gestellt werden(E-mail: Martin_Gwildies@gmx.de). Diese werde ich möglichst schnell beantworten! Auch würde es mich sehr freuen, wenn diejenigen, die mein Referat interessant finden, mir schreiben und auch sagen, ob sie es z.B. für die Schule gebraucht haben oder sich einfach nur so dafür interessieren. Für Kritik bin ich dankbar...

Martin Gwildies <Martin_Gwildies@gmx.net>