Stochastik

Kombinatorik

Bei der Kombinatorik geht es um das **Zählen von Möglichkeiten**. Es handelt sich um Abzählverfahren. Wichtig dabei ist stets die **Auswahl** und die **Anordnung**.

	Reihenfolge der Objekte	
	wesentlich	unwesentlich oder vorgegeben
alle Objekte	**Permutation**	
nicht alle Objekte	**Variation**	**Kombination**

Bei jedem der drei Problemtypen können Objekte wiederholt werden bzw. von einander nicht zu unterscheiden sein!

Zu den einzelnen Problemtypen:

Permutation (Alle Obj. untersch.)

Auf wieviele Arten könnten n Objekte angeordnet werden?
$P_n = n!$
Beweis erfolgt mit vollständiger Induktion (siehe unten)

Permutation (mit nicht unt. Obj.)

Auf wieviele Arten können n Objekte angeordnet werden, wenn davon i Objekte m mal ununterscheidbar sind?

$$P_{n(m1,\, m2,\, \dots\, mi)} = \frac{n!}{m_1! * m_2! \dots * m_i!}$$

n= Totale Anzahl der Objekte (z.B. Buchst.)
m_i= Anzahl der ununterscheidbaren Objekte der i-ten Sorte

Beispiel: Auf wieviele Arten können die Buchstaben des Wortes OTTO angeordnet werden?

Variation (ohne Wiederholung)

Werden von n unterscheidbaren Objekten nur k ausgewählt, so kann man die Anzahl dieser Variationen so berechnen, wie wenn die nicht ausgewählten Objekte ununterscheidbar wären:

V(k,n) = $P_{n(n-k)}$ (bei k von n Objekten)

$$V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

wenn k=n: $V(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = 1$

Man muss die Anzahl möglicher Anordnungen durch die Anzahl möglicher Anordnungen von (n-k) Objekte dividieren.

Beispiel: Abkürzungen mit 3 Buchstaben (ohne Wiederholung)

$$V(3{,}26) = \frac{26!}{23!} = \frac{26 * \dots * 1}{23 * \dots * 1} = 26 * 25 * 24$$

=15’600
An der ersten Stelle kann ich 26, an der zweiten 25 und an der dritten 24 nehmen.

Variation (mit Wiederholung)	Dies entspricht dem Kugeln ziehen mit Zurücklegen: Ich ziehe 1 von 5 Kugeln, lege sie wieder zurück, ziehe nochmals 1 von 5 Kugeln usw. Dies mache ich n mal: $\overline{V}(k,n) = n * n * ... * n$ (k-mal) $\overline{V}(k,n) = n^k$ **Beispiel:** Anzahl aller Abkürzungen mit 3 Buchstaben
Kombination (ohne Wiederholung)	Bei der Kombination ist die Reihenfolge unwesentlich, deshalb muss die entsprechende Zahl von Variationen durch die Zahl der Permutationen der ausgewählten Objekte dividiert werden. $C(k,n) = \frac{V(k,n)}{k!}$ $\frac{Anzahl.7ner.Kombinationen.von.45}{Anzahl.mögl.Anordn.von.7.Objekten}$ $C(k,n) = \frac{n!}{(n-k)! * k!}$ $C(k,n) = \binom{n}{k}$ **Beispiel:** Anzahl 3er Kombinationen von 7 Bundesräten => Symmetrieeigenschaft des Binomialkoeffizienten: Pro 3er Kombination hat es eine 4er Kombination, die zu Hause bleibt: $\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b} \Rightarrow \binom{7}{3} = \binom{7}{4}$
Kombination (mit Wiederholung)	Man hat z.B. 7 versch. Farben und muss am Schluss 3 Objekte haben: $\overline{C}(k,n) = \binom{n+k-1}{k}$ Mit der Symmetrieeigenschaft des Binomialkoeffizienten gilt: $\overline{C}(k,n) = \binom{n+k-1}{(n+k-1)-k} = \binom{n+k-1}{n-k}$

Zu den Binomialkoeffizienten

Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ erfüllen die folgende Rekursionsgleichung: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ Diese Gleichung stellt den Zusammenhang zwischen dem Binomialkoeffizienten und dem Pascalschen Dreieck her.

Deduktiver Beweis	Man geht vom Allgemeinen zum Speziellen (=Normaler Beweis)
Induktiver Beweis	Vom Speziellen schliesst man aufs Allgemeine. Diese Art der Beweisführung ist jedoch nur zulässig, wenn man nachweisen kann, dass es für alle Fälle gilt = **vollständige Induktion**
Rekursion	Ich definiere etwas indem ich mich auf tiefere Elemente beziehe und eine Verankerung habe (-> Binomialkoeffizient <-> Pascalsches Dreieck)

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung geht es darum, Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von Ereignissen zu berechnen. Man betrachtet dazu ein Zufallsexperiment, das ist ein Vorgang bei dem nicht im Voraus feststeht, was dabei herauskommt. Dabei nennt man die Fakten, die bei einem Zufallsexperiment resultieren können Elementar Ereignisse. Die Menge aller Elementarereignisse eines Zufallsexperiments nennt man Ereignisraum. Jede Teilmenge dieses Ereignisraumes nennt man Ereignis. Ist das Ereignis gleich dem Ereignisraum so spricht man vom sicheren Ereignis. Ist das Ereignis aber die leere Menge, so spricht man vom unmöglichen Ereignis.

Man unterscheidet im wesentlichen zwischen zwei Wahrscheinlichkeitsrechnungsmethoden, der Laplacschen und der Wahrscheinlichkeit nach Kolmogórov.

Die Laplacsche Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses A ist der Quotient, gebildet aus der Anzahl Elementarereignisse im gesuchten Ereignis, durch die Anzahl elementar Ereignisse überhaupt. Man kann auch sagen: **Günstige Fälle** durch **mögliche Fälle**.

Der Laplacsche Wahrscheinlichkeitsbegriff hat aber zwei gewichtige Nachteile!

- Alle Elementarereignisse werden als gleichwahrscheinlich angesehen**. Die Wahrscheinlichkeit wird also mit der Gleichwahrscheinlichkeit definiert!**
- Ist der Ereignisraum eine unendliche Menge, kann die Wahrscheinlichkeit nur mit Grenzwerten berechnet werden.

Wahrscheinlichkeiten können beliebig addiert werden, sofern sie keine gemeinsamen Elementarereignisse haben!
Der Summensatz: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ sofern $A \cap B = \emptyset$ **sonst gilt**
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Mit dem Summensatz definiert man die Gleichwahrscheinlichkeit: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ (=Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen von A addiert mit der Gegenwahrscheinlichkeit der Ereignisses A ist das Sichere Ereignis).

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses heisst bedingt, wenn man die Wahrscheinlichkeit seines Eintreffens betrachtet unter der Voraussetzung, dass ein anderes Ereignis schon eingetroffen ist.

stochastische Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse heissen stochastisch unabhängig, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des einen gleich gross ist, wenn das andere Ereignis schon eingetroffen ist, wie wenn es nicht eingetroffen ist. Das klassische Beispiel ist hierbei der Würfel (Ein Würfel hat kein Gedächtnis)

Bäume

Wir brauchen Bäume zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Problemen, die sich aus mehreren Schritten zusammensetzen, deren jeder ein Zufallsexperiment ist. Beim resultierenden Baum schreiben wir zu jeder Strecke die bedingte Wahrscheinlichkeit und zu jedem Knotenpunkt (Verzweigungsstelle) die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses.

Einfache Wette

Bei der einfachen Wette verhalten sich die Einsätze der beiden Spieler zueinander wie die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen des vom Spieler vorausgesagten Ereignisses. Im Normalfall behauptet der eine Spieler das Ereignis treffe ein und der andere es treffe nicht ein. Dann verhalten sich die Einsätze wie die Wahrscheinlichkeit zur Gegenwahrscheinlichkeit. Dieser Quotient heisst Wettesatz.

Steigt die Zahl der Wetten, so gleichen sich Einsätze und Auszahlungen aufs Ganze gesehen an. Das heisst jeder Spieler hat am Schluss gleichviel Geld in der Tasche wie am Anfang.

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff nach Kolmogórov

Die Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffes von Kolmogórov ersetzt diejenige von Laplace ohne in den einfachen Fällen ihre Resultate zu verändern. Alle Mängel der alten Definition fallen aber weg (die Wahrscheinlichkeit wird mit der Gleichwahrscheinlichkeit definiert; ist der Ereignisraum eine unendliche Menge, kann die Wahrscheinlichkeit nur mit Grenzwerten berechnet werden).

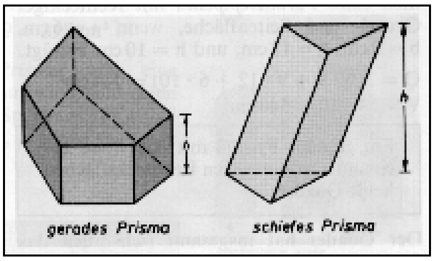
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ist eine reelle Zahl. Sie wird durch eine Abbildung gefunden. Die Definitionsmenge ist die Menge aller Ereignisse, also die Menge aller Teilmengen des Ereignisraums (= die Potenzmenge des Ereignisraums). Bei Kolmogórov wird jedem Ereignis als Wahrscheinlichkeit eine reelle Zahl zugeordnet.

Durch axiomatisch festgelegte Bedingungen ist die Wahrscheinlichkeit **additiv**, **definit** und **normiert**. Die Additivität ist durch den einfachen Summensatz gegeben ($P(A)+P(B)=P(A\cup B)$) Die Wahrscheinlichkeit ist nie negativ (=definit) und mit dem sicheren Ereignis auf 1 normiert (gleiche Struktur bei den Volumenaxiomen und den trigonometrischen Funktionen).

Stereometrie

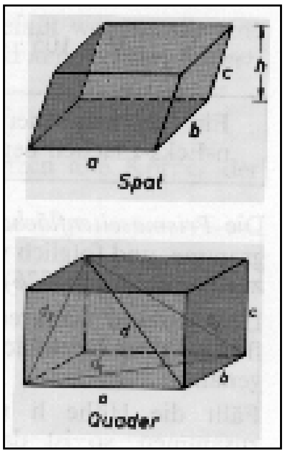
Das Prisma

Ein geometrischer Körper, der von 2 zueinander parallelen und kongruenten n-Ecks-Flächen begrenzt wird, heisst Prisma. Fällt die Höhe eines Prismas mit einer Seitenkante zusammen, so ist das Prisma gerade; die Seitenkanten stehen dann wie auch die Höhen senkrecht auf der Grund- und Deckfläche. Die Oberfläche eines Prismas ergibt sich aus der Summe aller Begrenzungsflächen, das Volumen aus dem Produkt von Grundfläche und Höhe.



Das Spat

Ein schiefes vierseitiges Prisma mit paarweise kongruenten Parallelogrammen als Begrenzungsflächen heisst Spat. Das Spat ist somit ein Spezialfall des Prismas.

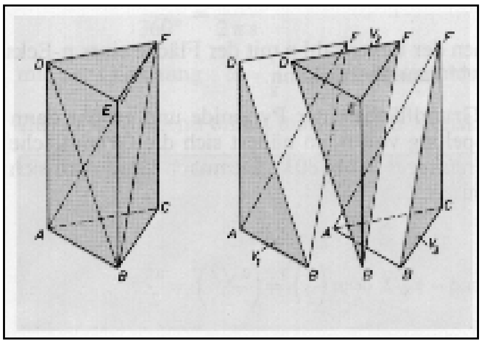


Der Quader

Ein gerades Prisma mit paarweise zueinander kongruenten Rechtecksflächen heisst Quader. Der Quader ist somit ein Spezialfall des Prismas.

Die Pyramide

Eine Pyramide entsteht, wenn man die Eckpunkte eines n-Ecks mit einem Punkt S ausserhalb der n-Eck-Ebene verbindet. Das n-Eck stellt die Grundfläche, der Punkt S die Spitze der Pyramide dar. Die Seitenlängen des n-Ecks heissen Grundseiten (oder Grundkanten), die Verbindungsstrecken mit S werden Seitenkanten genannt. Wie bei fast allen anderen Körpern wird die senkrechte Entfernung von der Spitze bis zur Grundfläche G mit Höhe h bezeichnet. Ist die Grundfläche ein regelmässiges n-Eck, so spricht man von einer regelmässigen Pyramide. Die Pyramide heisst gerade, wenn S genau senkrecht über dem Grundflächenmittelpunkt M liegt, im anderen Fall ist die Pyramide schief. Jede Pyramide kann durch eine geeignete Raumscherung in eine andere volumengleiche Pyramide überführt werden, die den 3. Teil eines geraden Prismas darstellt.



Der Kegel (Kreiskegel)

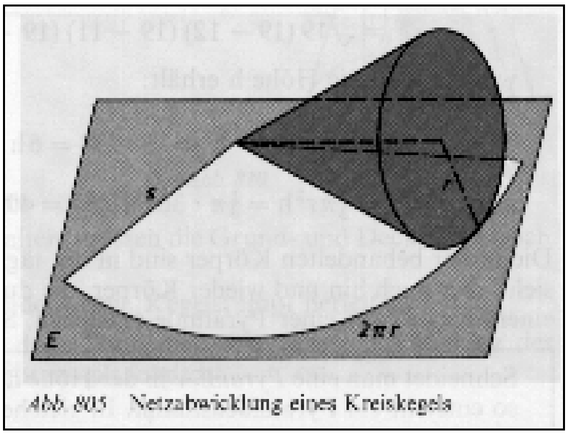
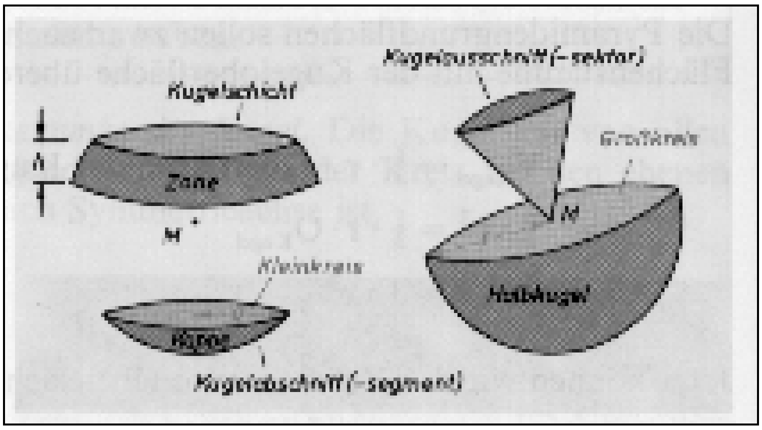


Abb 805 Netzabwicklung eines Kreiskegels

Bei einer räumlichen Rotation eines rechtwinkligen Dreiecks um eine Kathete entsteht ein Kreiskegel. Wie auch bei der Pyramide nennt man den Kegel gerade, wenn die Spitze S senkrecht über dem Kreismittelpunkt im Raum liegt. Im anderen Fall handelt es sich um einen schiefen Kreiskegel. Es liegt auf der Hand, dass die Volumenberechnung beim Kreiskegel in völliger Analogie zur Berechnung bei der Pyramide verläuft. Um die Mantelfläche des Kreiskegels zu berechnen, stelle man sich diese in einer Ebene abgewickelt vor. Die entstehende ebene Figur ist leicht vorstellbar; es handelt sich bei der Abwicklung um einen Kreisausschnitt (Sektor) mit dem Sektorradius s (Kegelseitenlänge) und der Bogenlänge $2\pi r$ (Umfang des Kegelgrundkreises) über einem Mittelpunktswinkel α. Der Sektorflächeninhalt, also die Kegelmantelfläche, ergibt sich nun aus dem halben Produkt der zugehörigen Bogenlänge und dem Sektorradius. Somit gilt: $s\pi r$.

Die Kugel



Die Kugel ist der geometrische Ort aller Punkte im Raum, die von einem fest gewählten Punkt M den konstanten Abstand r haben. Jede Ebene, die eine Kugel schneidet, erzeugt als Schnittfläche einen Kreis. Verläuft diese Ebene genau durch den Kugelmittelpunkt, so entsteht ein Grosskreis als Schnittfläche und 2 Halbkugeln. Dagegen ergeben sich 2 Kugelsegmente, wenn die Schnittfläche kein Grosskreis ist. Die Bezeichnungen Kugelsegment und Kugelsektor sind entsprechend denen des Kreises gewählt, da ihre Schnittflächen durch den Kugelmittelpunkt ein Kreissegment und Kreissektor darstellen. Eine Kugelschicht entsteht durch 2 zueinander parallele Kugelschnitte. Sowohl das Volumen einer Kugelschicht als auch das eines Kugelsektors besteht in einem Bestandteil aus dem Volumen eines Kugelsegmentes. Während sich nämlich die Kugelschicht als Differenz zweier Kugelsegmente auffassen lässt, setzt sich das Volumen eines Kugelsektors aus dem Kugelsegment und eines Kreiskegels zusammen.

Der Satz von Cavalieri

Zwei Körper haben gleiches Volumen, wenn alle ihre Querschnitte in gleichem Abstand k parallel zur Grundfläche flächengleich sind. Dabei ist es nicht erforderlich, dass die Schnittflächen kongruent oder ähnlich sind; sie können vielmehr eine ganz andere Form aufweisen. Entscheidend ist lediglich der gleiche Flächeninhalt.