Die Quadratur des Kreises

Schon die Ägypter „lösten“ dieses Problem, indem sie als Seite des gesuchten Quadrats 8/9 des Durchmessers des Kreises nahmen. Dieser Wert ist im Papyrus Rhind angegeben und läuft auf eine Wert von 3,1605 für π hinaus.

Von den Griechen setzte sich bereits Anaxagoras mit der Kreisquadratur auseinander. Diese war in Griechenland sehr populär und fand sogar ihren Weg in Theaterstücke.
Die nächste Kreisquadratur wurde von Antiphon versucht (leider bedient sie sich keines mathematischen Gedankenganges, sondern nur heuristischer Überlegungen). Antiphon dachte sich dem gegebenen Kreis ein Polygon eingeschrieben, etwa ein Dreieck oder ein Quadrat. Durch Halbierung der Kreisbögen über den Seiten entsteht ein Polygon mit doppelter Seitenanzahl.Diesen Prozeß dachte sich Antiphon immer wieder durchgeführt und glaubte, dadurch schließlich ein Polygon zu erhalten, dessen Grundlinie so klein wäre, daß sie sich mit dem Kreisumfangsstückchen decken würde. Nun kann man jedes Polygon in ein flächengleiches Quadrat verwandeln So glaubte Antiphon, die Kreisquadratur bewerkstelligt zu haben.

Auch beim Problem der Quadratur des Kreises waren die Griechen sehr findig in der Entdeckung von Kurven, mit deren Hilfe man Lösungen erzielte. Die wohl bekannteste Kurve dieser Art ist die Quadratrix. Diese Kurve wurde von einem Geometer namens Hippias entdeckt. Es ist nicht ganz gewiß, ob dieser Geometer mit dem bekannten Hippias von Elis identisch ist. Hippias verwendete die Quadratrix zur Dreiteilung des Winkels. Die Quadratrix kann man auf folgende Art und Weise definieren.

Wir denken uns einen Viertelkreis CXA um den Punkt O gegeben. Ein Radiusvektor $\overrightarrow{OX}$ drehe sich in einem gegebenen Zeitraum T gleiförmig von OC nach OA. Die Gerade MN bewege sich in dem selben Zeitraum ebenfalls gleichförmig von CB nach OA. Dann ist die Menge aller Schnittpunkte P von OX und MN eine Quadratrix.

Wir zeichnen diese Kurve nochmals. Wenn es nun gelingt, zu zeigen, daß $\frac{CXA}{\overline{CO}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{OQ}}$ ist, so haben wir damit eine Beziehung gewonnen, aus der man eine Strecke konstruieren kann, die gleich dem Bogen CXA ist. Somit hat man dann den Umfang des Kreises um O mit dem Radius OA als Strecke dargestellt, woraus man unmittelbar die Quadratur des Kreises gewinnen kann.

Zum Beweis der Beziehung $\frac{CXA}{\overline{CO}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{OQ}}$ gibt Pappos einen doppelten indirekten Beweis an. Nehmen wir an, es gilt $\frac{CXA}{\overline{CO}} \neq \frac{\overline{CO}}{\overline{OQ}}$. Man kann die Übereinstimmung dieser beiden Quotienten dann durch Verkleinerung oder Vergrößerung der Strecke $\overline{OQ}$ erreichen. Pappos zeigt, daß das auf einen Widerspruch führt.

Sei also zunächst $\overline{OA'} > \overline{OQ}$ so beschaffen, daß $\frac{CXA}{\overline{CO}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{OA'}}$. Wir zeichnen den Viertelkreis um O mit dem Radius $\overline{OA'}$ und bezeichnen seinen Schnittpunkt mit OC mit C', den Schnittpunkt mit der Quadratrix mit P und den Fußpunkt des Lotes durch P auf OA mit A''. Da nun CXA:$C'PA' = \overline{CO} : \overline{C'O}$ gilt (dieses Resultat war den Griechen geläufig), erhält man: $C'PA' = \overline{CO}$.

Nach der Definition der Quadratrix gilt $\frac{CXA}{XA} = \frac{\overline{CO}}{\overline{PA''}}$

Somit folgt: $\frac{CXA}{XA} = \frac{C'PA'}{PA'} = \frac{\overline{CO}}{\overline{PA''}}$

Also wäre der Bogen PA' gleich der Strecke $\overline{PA''}$.Das ist aber ein Widerspruch, denn ein Halbbogen kann niemals seiner Halbsehne gleich sein.
Nun nehmen wir an, $\overline{OA''} < \overline{OQ}$ sei so bestimmt, daß gilt:

$$CXA : \overline{CO} = \overline{CO} : \overline{OA''}$$

Wir zeichnen einen Viertelkreis um O mit Radius $\overline{OA''}$, bezeichen den Schnittpunkt mit OC mit C'', errichten in A''das Lot auf OA und erhalten P als Schnittpunkt des Lotes mit der Kurve. M sei der Schnittpunkt von OP mit dem Viertelkreis mit dem Radius $\overline{OA''}$.
Dann gilt CXA : $C''MA'' = \overline{CO} : \overline{C''O} = \overline{CO} : \overline{OA''}$woraus wegen $\overline{CO} : \overline{OA''} = CXA : \overline{CO}$ folgt, daß $\overline{CO} = C''MA''$.
Ferner gilt aufgrund der Definition der Quadratrix

$$C''MA'' : MA'' = \text{CXA} : \text{XA} = \overline{CO} : \overline{PA''},$$

somit $C''MA'' : MA'' = C''MA'' : \overline{PA''}$, also $MA'' = \overline{PA''}$. Daß dies ein Widerspruch ist erkennt man sofort aus der Figur, die man durch Spiegelung der Figur $MA''P$ an der Geraden OP erhält.

Eine weitere Kurve der höheren Geometrie, die man zur Lösung der Quadratur des Kreises verwenden kann, ist die Spirale des Archimedes. Wir können diese Kurve so beschreiben:

Ein Radiusvektor $\overrightarrow{OB}$ bewegt sich gleichförmig um den Punkt O, und zwar von OA ausgehend gegen den Uhrzeigersinn. Gleichzeitig bewegt sich ein Punkt P auf dem Strahl von O aus mit konstanter Geschwindigkeit in Richtung B. Die Bahnkurve, die der Punkt P durchläuft, nennt man Spirale des Archimedes. Wie man nachprüfen kann, hat diese Kurve in Polarkoordinaten die Gleichung $r = a.\varphi$ (wobei a ein passend gewählter Proportionalitatsfaktor ist).

Die Kreisquadratur bewerkstelligt man mit der Spirale auf folgende Weise: Man zeichnet zum vorgegebenen Kreis mit dem Radius a die Archimedische Spirale $r = a.\ \varphi$. Nach Konstruktion der Kurve ist die Strecke $\overline{OP}$ gleich dem Bogen AC, also kann man ein Viertel des Kreisumfanges dadurch erhalten, daß man in O das Lot auf OA errichtet und mit der Spirale schneidet. Ist P_1 der Schnittpunkt, dann ist $\overline{OP_1}$ die Länge des Viertelkreises. Daraus ergibt sich unmittelbar für die Fläche des Kreises:
$F = a.2\overline{OP_1} = 2a.\overline{OP_1}$, und das kann man als Fläche eines Rechteckes mit den Seiten 2a und $\overline{OP_1}$ auffassen. Dieses Rechteck braucht man nun nur noch in ein flächengleiches Quadrat zu verwandeln.

In der Geschichte der Mathematik wurde eine Reihe von mit Zirkel und Lineal durchführbaren - oft recht genauen - Näherungskonstruktionen für die Kreisquadratur gefunden. Eine solche Näherungslösung ist etwa die Näherungskonstruktion des polnischen Jesuiten Kochanski aus dem Jahre 1685:

Man zieht in einem Punkt T des Kreises k die Tangente und den dazu normalen Kreisdurchmesser TA. Dann konstruiert man mit derselben Zirkelöffnung den Winkel TMX = 30°, und trägt auf der Tangente die Strecke XB = 3r auf. Die Strecke AB ist eine sehr gute Näherung für den halben Kreisumfang:
$AB \approx \pi.r = u\ ½$, der Fehler ist kleiner als 7.10^{-5}.

Auch mehrere Apparate wurden für die exakte Quadratur des Kreises entwickelt. Ein mit einem derartigen Apparat arbeitendes Verfahren verwendet neben Zirkel und Lineal noch ein Instrument, das man Integraph nennt.

Quellenangabe:
- Geschichte der Mathematik:
  Kaiser-Nobauer; hpt; S.142 ff.
- Lehrbuch der Mathematik und Aufgabensammlung:
  Ludwig-Laub; Hölder-Pichler-Tempsky; S.275 f.

$$a\cos(30°) = r$$

$$a\frac{\sqrt{3}}{2} = r$$

$$\underline{\underline{a = \frac{2r}{\sqrt{3}}}}$$

$$b = a\sin(30°)$$

$$b = \frac{2r}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{b = \frac{r}{\sqrt{3}}}}$$

$$(2r)^2 + \left[r + r + \left(r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)\right]^2 = x^2$$

$$4r^2 + \left(\frac{3r\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 = x^2$$

$$4r^2 + \frac{27r^2}{3} - \frac{6r^2\sqrt{3}}{3} + \frac{r^2}{3} = x^2$$

$$4r^2 + \frac{28r^2}{3} - 2\sqrt{3}r^2 = x^2$$

$$\frac{40r^2}{3} - 2\sqrt{3}r^2 = x^2$$

$$r^2\left(\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}\right) = x^2$$

$$r\sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = x$$

$$r.3{,}141533277 \approx x$$

$$3{,}141592654 \approx \pi \Rightarrow \underline{\underline{Fehler < 0{,}00006}}$$

$$3{,}141592654 \approx \pi \Rightarrow Fehler < 0{,}00006$$

$$\pi d$$