

Mathematik der griechischen Antike

(Johannes Pöckl)

Die griechische Mathematik dauerte ca. 1500 Jahre. Die Griechen sind um 2000 v. Chr. aus dem Norden in den Mittelmeerraum eingewandert und deren Kultur war die Grundlage für die abenländische Politik, Kunst und Wissenschaft. Die Griechen hatten zwar ein Dezimalsystem, aber eine zu komplizierte Ziffernschreibweise. Das Ziffernsystem bestand aus 24 Buchstaben, wobei Digamma, Kappa und San hinzugekommen sind. Es gab 3 Zahlenkategorien und wollte man dazwischen liegende Zahlen darstellen kam es zu einer Addition, wie wir es bei den röm. Ziffern kennen. Ein Querstrich über den Buchstaben deutete an, daß es sich um Zahlbuchstaben handelte. Ein senkrechter Strich stand für 1000.

Es gab eine

- a) Ionische Periode (Thales, Pythagoras, Anaxagoras, Hippokrates, ...) 600-400 v. Chr.
- b) Athenische Periode (Sophisten, Platon, Deinostratos, ...) 400-300 v. Chr.
- c) Alexandrische Periode (Eukleides, Archimedes, Nikomedes, ...) 300-200 v. Chr.
- d) Spätzeit (Hipparchos, Heron, Pappos, ...) 200 v. Chr. - 300 n. Chr.

ad a)

1) Thales aus Milet ca. 600 v. Chr.

zählt zu den „sieben Weltweisen“, weil er eine Sonnenfinsternis vorausgesagt (gerechnet) hat.

+ Gleichheit der Scheitelwinkel

+ Gleichheit der Basiswinkel und Winkelsumme im gleichschenkeligen Dreieck

+ Dreieckskonstruktion aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkel

+ Satz von Thales

2) Pythagoreer gegründet von Pythagoras aus Samos (580-501 v. Chr.)

von der Mathematik getragene Weltanschauung, daß die Zahl (= arithmos) das Wesen der Dinge ausmacht

+ Unterscheidung von geraden und ungeraden Zahlen

+ Quadratzahlen sind Summe ungerader Zahlen

$$1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$$

+ Dreieckszahlen stellen die einfachste arithmetische Reihe dar

$$1+2+3+\dots+n=[n(n+1)]/2$$

+ Summe gerader Zahlen ist ein Produkt zweier „Zahlenpaare von der Differenz 1“ (=Heteromeken)

$$2+4+6+\dots+(2n)=n(n+1)$$

+ Harmonische Proportion

$$1/a - 1/b = 1/b - 1/c$$

Sie zeigt sich beim Verhältnis der Flächen (a=6), Ecken (b=8) und Kanten (c=12) des Würfels.

+ 2 Zahlen a und b heißen befreundet, wenn jede von beiden der Teilersumme der anderen gleich ist

$$220 = 1+2+4+7+14$$

$$284 = 1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110$$

+ Auflösung der linearen Gleichung mit n Unbekannten

+ Lehrsatz von Pythagoras

$$(2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 = (2n^2+2n+1)^2$$

weiteres: Einführung irrationaler Zahlen
Pentagramm (Sternfünfeck)

3) Anaxagoras aus Klazomenai (500-428 v. Chr.)
Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal

4) Hippokrates aus Chios (um 400 v. Chr.)

Lehrbuch der Geometrie

+ Verdoppelung des Würfels durch Einschalten von zwei mittleren Proportionalen x und y zwischen

die Würfelkanten a und $2a$

+ Mönchchen

über gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke und über gleichschenklige Trapeze konstruierbar

Inhaltssumme der beiden Mönchchen ist gleich dem Inhalt des Dreiecks

→ Hilfssatz: 2 Kreisflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser

Mit Hippokrates hat (erstmalig in nachweisbarer Form) der *Beweis* Einzug in die Mathematik gehalten.

ad b)

1) Hippias aus Elis (um 460 v. Chr.)
Dreiteilung des Winkels

2) Deinostrotos (um 350 v. Chr.)

Kreisquadratur

$$x = y \cdot \cot\left[\frac{\pi y}{2a}\right]$$

→ transzendente Kurve

→ mit Lineal und Zirkel nicht konstruierbar

3) Archytas aus Tarent (428-365)

hat im Zusammenhang mit einer Lösung des Delischen Problems die erste Raumkurve in der Mathematikgeschichte gewonnen, und zwar als Schnitt eines Kegelmantels und eines Kreiswulstes mit einer Zylinderfläche.

ad c)

1) Euklid aus Alexandria (365-300)

+ Begründer der Axiomatik

z.B.: Parallelaxiom = zu einer geg. Geraden durch einen geg. Punkt gibt es genau eine Parallele

+ 11 Schriften, am bekanntesten „Elemente“ 13 Bände

Buch I: Lehrsatz des Pythagoras

Buch V: Proportionslehre mit Einschluß des Irrationalen

Buch VII: Primzahlen

Buch XIII: fünf reguläre Körper

2) Archimedes aus Syrakus (287-212)

9 Schriften, z.B.: Über das Gleichgewicht ebener Flächen

Über Kugel und Zylinder

Die Kreismessung

+ Mit der Kreismessung wird erstmalig in der Geschichte der Mathematik die Kreiszahl π zwischen rationale Schranken eingeschlossen.

+ Rauminhaltsbestimmungen an Rotationskörpern: Drehellipsoid, Drehparaboloid, zweischaliges Drehhyperboloid

→ Körper in Schichten zerlegt und durch ein- und mehrbeschriebene Zylinder approximiert

+ Modell des Hebelgesetzes: Kraft mal Kraftarm = Last mal Lastarm

3) Apollonios aus Perge (262-190)

Konika → 8 Bücher

+ Def. der Kegelschnitte

$$y^2 = 2px - (1-\varepsilon^2)x^2$$

$\varepsilon = 1$ → Parabel; $0 < \varepsilon < 1$ → Ellipse; $\varepsilon > 1$ → Hyperbel

ad d)

1) Menelaos aus Alexandria (um 100 v. Chr.)

+ Satz des Menelaos

2) Klaudios Ptolemaios aus Alexandria (85-165 n. Chr.)

+ $\pi \approx 377/120 \approx 3,1417...$

+ Satz von Ptolemaios

3) Heron aus Alexandria (um 75 n. Chr.)

Heronische Dreiecksformel: $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ mit $s = (a+b+c)/2$

a) Bei quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten werden auch negative Wurzeln als möglich in Betracht gezogen (wenngleich nicht berechnet).

b) wenn der Radikand einer Quadratwurzel eine natürliche Zahl ist, läßt sich die numerische Bestimmung durch wechselweise Anwendung des arithmetischen und geometrischen Mittels durchführen.

4) Diophantos aus Alexandria (um 250 n. Chr.)

Arithmetika: 13 Bücher

Lösung von Gleichungen (linear und quadratisch) mit mehreren Unbekannten

$$x^3 + y^3 = x + y$$

$$ax + by = c \quad (\text{jedoch nur rationale Lösungen})$$

erster Zahlentheoretiker der Mathematikgeschichte

5) Pappos aus Alexandria (um 320 n. Chr.)

+ Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes für schiefwinklige Dreiecke

+ Aussagen über Extremwerte, Spiralen, Schraubflächen, Quadratrix

+ Satz über Inhaltsbestimmungen von Drehkörpern mittels ihres Schwerpunktes