Kurze Einführung in die elementare Mathematik

von Dr.-Ing. Herbert Voß

Erstfassung 1972/73
Überarbeitung 1995

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Hilfsmittel

1.1 Grundlagen der Aussagenlogik

Gegenstand mathematischer Betrachtungen sind Aussagen. Die *aussagenlogischen Konstanten* dienen dazu, Aussageformen zu neuen Aussageformen zu verknüpfen.

Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch.[1]

1.1.1 Verknüpfungen

1.1.1.1 Die „Und“-Verknüpfung (Konjunktion)[2]

Symbol der „Und“-Verknüpfung: $\wedge$

Die beiden Aussageformen *„2 teilt x; 3 teilt x“* werden durch „Und“ zusammengefaßt zu der *einen* Aussageform *„2 teilt x und 3 teilt x.“*

Die Konjunktion zweier Aussagen ist wieder eine Aussage, und sie ist genau dann wahr, wenn jede der beiden durch „Und“-verknüpften Komponenten wahr ist.

Tabelle 1 Wahrheitstafel der „Und“-Verknüpfung

A	w	f	w	f
B	w	w	f	f
$A \wedge B$	w	f	f	f

1.1.1.2 Die „Oder“-Verknüpfung (Alternative)[3]

Symbol der „Oder“-Verknüpfung: $\vee$

Während das umgangssprachliche „Oder“ verschiedene Bedeutungen hat, verwendet man in der Mathematik das „Oder“ meist im Sinne des lateinischen „vel“ als *nichtausschließendes* „Oder“, z.B., wenn man sagt:

Jede natürliche Zahl, die größer als zwei ist, ist eine Primzahl, oder sie besitzt einen Primteiler.

Eine Alternative ist genau dann wahr, wenn wenigstens eine ihrer Komponenten wahr ist:

Tabelle 2 Wahrheitstafel der „Oder“-Verknüpfung

A	w	f	w	f
B	w	w	f	f
$A \vee B$	w	w	w	f

[1] Die sogenannte Fuzzy-Logik versucht diese Aussage zu erweitern, indem eine Aussage „weder richtig wahr noch richtig falsch“ zugelassen wird.

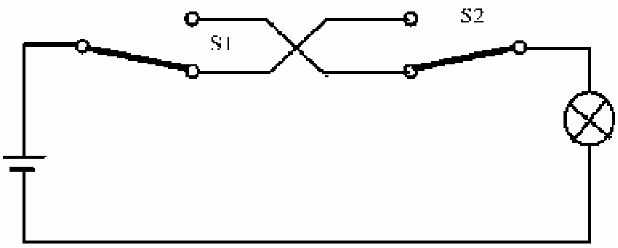
[2] Lat.: **et**

[3] Lat.: **vel**

1.1.1.3 Die „Entweder-Oder“-Verknüpfung (Disjunktion)[4]

Symbol der „Entweder-Oder“-Verknüpfung: ⏲⮝

Die „Entweder-Oder“-Verknüpfung soll an Hand eines kleinen Schaltbildes verdeutlicht werden:



Die Disjunktion ist genau dann wahr, wenn ein Schalter oben und ein Schalter unten steht (Leuchten der Glühlampe). "Entweder" ist S1 oben (wahr) und S2 unten (falsch), „Oder“ S1 ist unten (falsch) und S2 oben (wahr).

Abbildung 1 Darstellung der Disjunktion als Schaltung

Tabelle 3 Wahrheitstafel der „Entweder-Oder“-Verknüpfung

A	w	f	w	f
B	w	w	f	f
A ++ B	f	w	w	f

1.1.1.4 Die „Nicht“-Verknüpfung (Negation)

Symbol der „Nicht“-Verknüpfung: ➢

Bei nichtklassischen Auffassungen wird die Negation entweder überhaupt nicht zugelassen, oder je nach dem eingenommenen Standpunkt interpretiert. Wenn man die Negation zuläßt, geschieht das immer derart, daß nie zugleich eine Aussage und ihre Negation anerkannt werden. Im klassischen Fall der zweiwertigen Logik folgt daraus, daß „nicht“ den Wahrheitswert umkehrt (negiert).

Tabelle 4 Wahrheitstafel der „Nicht“-Verknüpfung

A	w	f
➢ A	f	w

1.1.1.5 Die „Wenn-So“-Verknüpfung (Implikation)

Symbol der „Wenn-So“-Verknüpfung: ⬇

Gelesen: Wenn A so B (A⬇B). Andere Aussageformen sind „Wenn A, dann B“ oder „Aus A folgt B“

⬅ B gilt, wenn A gilt
⬅ A ist hinreichend für B
⬅ B ist notwendig für A
⬅ A kann nur gelten, wenn B Gilt
⬅ Wenn A falsch ist, wird nichts ausgesagt.
⬅ Gegenüber den anderen Verknüpfungen hat die „Wenn-So“-Verknüpfung keinen inneren Zusammenhang.

---

[4] Lat.: **aut-aut**

Tabelle 5 Wahrheitstafel der „Wenn-So“-Verknüpfung

A	w	f	w	f
B	w	w	f	f
$A \Rightarrow B$	w	w	f	w

- Aus etwas Wahrem folgt also immer etwas Wahres!
- Aus etwas Falschem kann etwas Wahres oder Falsches folgen!

Für (A,B,C) = (f,w,f) folgt daher: $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C \neq A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

1.1.1.6 Die Äquivalenz

Symbol der Äquivalenz: $\Leftrightarrow$

Die Äquivalenz („Genau dann, wenn“) läßt sich als Konjunktion reziproker Implikationen auffassen: A gilt dann und nur dann, wenn B gilt.

Zwei Aussagen heißen äquivalent, wenn beide in allen möglichen Fällen den gleichen Wahrheitswert ergeben.

Es existieren folgende Sprechweisen für die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$:
a) „**genau wenn A, so B**“ oder
b) „**dann und nur dann, wenn A, so B**“ oder
c) „**aus A folgt B und umgekehrt**“.

Beispiele:
$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg B)$

2 Mengen

2.1 Der Mengenbegriff

Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen (Cantor). Diese Objekte werden die Elemente der Dinge genannt.

- $x \in A$ wird gelesen als x ist Element von A
- $y \notin A$ wird gelesen als y ist nicht Element von A

- Soll eine Menge aus den endlich oder unendlich vielen Elementen a,b,c,... gebildet werden, so bezeichnet man sie mit **{a,b,c,...}**.
- Ist a Element der Menge A**,** so wird das durch **a** $\in$ **A** symbolisiert.
- Die Definition schließt nicht aus, daß die Menge nur aus einem Element besteht. **A={a}**.
- Die leere Menge enthält kein Element. Sie wird mit dem Symbol $\emptyset$ bzw. {} bezeichnet.

2.2 Relationen zwischen Mengen

2.2.1 Gleichheit von Mengen

Eine Menge A ist ***gleich*** einer Menge B, in Zeichen **A=B,** wenn jedes Element von A auch Element von B und umgekehrt jedes Element von B auch Element von A ist.

2.2.2 Teilmenge, Restmenge

Eine Menge A ist in einer Menge B ***enthalten***, in Zeichen **$A \subseteq B$**, wenn jedes Element der Menge A auch Element der Menge B ist. A heißt dann **Untermenge** oder **Teilmenge** von B.

← Ist $A \neq B$, spricht man auch von einer echten Teilmenge ($A \subset B$).
← Ist A=B, spricht man von einer unechten Teilmenge ($A \subseteq B$).
← Die leere Menge $\emptyset$ ist Teilmenge einer jeden Menge.

Ist A eine echte Teilmenge von B**,** so nennt man die Menge der Elemente von B, die A nicht angehören, die **Restmenge** R von B zu A (oder die zu A komplementäre Menge von B), in Zeichen **R=B-A.**

← Zu jeder Menge von n Elementen gibt es genau 2^n Untermengen.[5]
← Ist eine Menge A in einer Menge B, enthalten und die Menge B Teilmenge einer Menge C, so ist auch A Teilmenge von C: **$A \subseteq A \cup B$** und **$B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$**.

2.3 Operationen mit Mengen

2.3.1 Vereinigungsmenge

Unter der Vereinigungsmenge **$A \cup B$**[6] der beiden Mengen A und B versteht man die Menge aller Elemente, die zu A **oder** zu B **oder** zu A **und** B gehören.[7] Es gilt daher:

$A \subseteq A \cup B$ und $B \subseteq A \cup B$.

Aus der vorstehenden Definition folgt, daß für die Vereinigung von Mengen die aus der elementaren Arithmetik bekannten Gesetze gelten:

Kommutativgesetz (Vertauschbarkeitsgesetz):
$A \cup B = B \cup A$

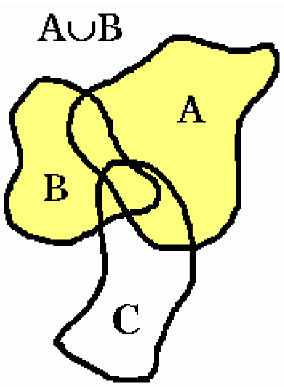


Abbildung 2 Vereinigung der Mengen A und B

Assoziativgesetz (Vereinigungsgesetz):
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Beispiele:

---

[5] Siehe auch Beispiel zur Potenzmenge.

[6] Das Mengenzeichen „$\cup$“ erinnert an das Symbol „$\vee$“ der ODER-Verknüpfung. Nicht zu verwechseln mit der „Entweder-Oder“-Verknüpfung! (Vgl. entsprechendes Kapitel)

[7] $C=A \cup B$ wird gelesen als C gleich A vereinigt mit B.

a) A sei die Menge aller durch 5 teilbaren Zahlen, die kleiner als 25 sind. B sei die Menge aller durch 7 teilbaren Zahlen, die kleiner als 35 sind. Es gilt dann $A \cup B=\{0,5,7,10,14,15,20,21,24,28\}$

b) A sei die Menge aller Quadrate. B sei die Menge Aller Dreiecke. $A \cup B$ ist dann die Menge aller Quadrate **und** Dreiecke.

2.3.2 Durchschnitt

Unter dem Durchschnitt **$A \cap B$**[8] der beiden Mengen A und B versteht man die Menge aller Elemente, die **sowohl** zu A **als auch** zu B gehören.[9] Es gilt daher:

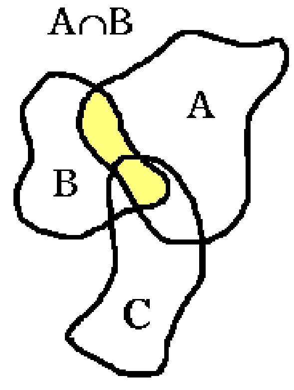


Abbildung 3 Durchschnitt der Mengen A und B

$$A \cap B \subseteq A \;\text{ und }\; A \cap B \subseteq B.$$

Für die Bildung des Durchschnitts gelten die folgenden Gesetze:

Kommutativgesetz (Vertauschbarkeitsgesetz):
$$A \cap B = B \cap A$$

Assoziativgesetz (Vereinigungsgesetz):
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Distributivgesetz (Verteilungsgesetz):
$$(A \cap B) \cup C = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

🡐 Wenn die Mengen A und B **kein** gemeinsames Element enthalten, wenn also gilt $A \cap B = \emptyset$, nennt man derartige Mengen **elementfremde** oder **disjunkte** Mengen.

Beispiele:

a) A ist die Menge aller **Rhomben**. B ist die Menge aller **Rechtecke**. $A \cap B$ ist dann die Menge aller **Quadrate**.

b) A ist die Menge aller **Rhomben**. B ist die Menge aller **Quadrate**. Es gilt dann $A \cap B=B$; denn alle Elemente von B gehören auch zu A.

2.3.3 Differenz

🡐 Unter der Differenz **A\B** der beiden Mengen A und B man die Menge aller Elemente von A, die nicht zu B gehören.[10]

🡐 Sind die Mengen A und B elementfremd, so stimmt die Differenz A\B mit A überein und umgekehrt.

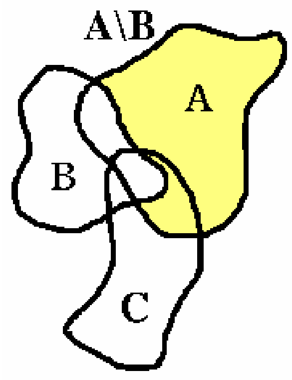


Abbildung 4 Differenz der beiden Mengen A und B

Auf jeden Fall aber gilt:

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B),$$

weil bei der Differenzbildung von A nur Elemente weggelassen werden, die sowohl zu A als auch zu B gehören.

Beispiel:

---

[8] Das Mengenzeichen „∩" erinnert an das Symbol „∧" der „UND"-Verknüpfung.

[9] $C=A \cap B$ wird gelesen als C gleich A geschnitten min B

[10] $C=A\setminus B$ wird gelesen als C gleich Differenz von A und B

Aus A={a,b,c,d} und B={b,n,a} folgt A\B={c,d}.

2.3.4 Produktmenge

Unter dem Mengenprodukt **AxB** der beiden Mengen A und B versteht man die Menge aller geordneten Elementpaare (a;b) mit a∈A und b∈B.[11]

Beispiel:
Aus A={a_1,a_2,a_3} und B={b_1,b_2} folgt AxB={(a_1,b_1),($a_1$$b_2$),($a_2$,$b_1$),($a_2$$b_2$),($a_3$,$b_1$),($a_3$$b_2$)}

2.3.5 Potenzmenge

Die Potenzmenge **𝒫(A)** der Menge A enthält als Elemente alle Untermengen von A. Besteht aus A aus n Elementen, so enthält 𝒫(A) insgesamt 2^n Untermengen.

Beispiel:
Aus A={a,b,c} folgt 𝒫(A)={∅,{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}}

2.4 Zusammenfassung

Bezeichnung	Teilmenge	Gleichheit zweier Mengen	Vereinigungs-menge	Durchschnitts-menge	Differenzmenge
Symbolik	A⊆B	A=B	A∪B	A∩B	A\B
Definition	x ∈ A⇒ x ∈ B	x ∈ A⇒ x ∈ B	x ∈ A∪B ⇔ x ∈ A ∨ x ∈ B	x ∈ A∩B ⇔ x ∈ A ∧ x ∈ B	x ∈ A\B ⇔ x ∈ A ∧ x ∉ B
Erfaßt werden alle Elemente, die ...			... *entweder* in A *oder* in B *oder* in beiden Mengen liegen.	... *sowohl* in A *als auch* in B liegen.	... *zwar* in A *aber nicht* in B liegen.

[11] Bei den Paarbildungen stehen jeweils die Elemente von A an erster Stelle.

3 Zahlbereiche

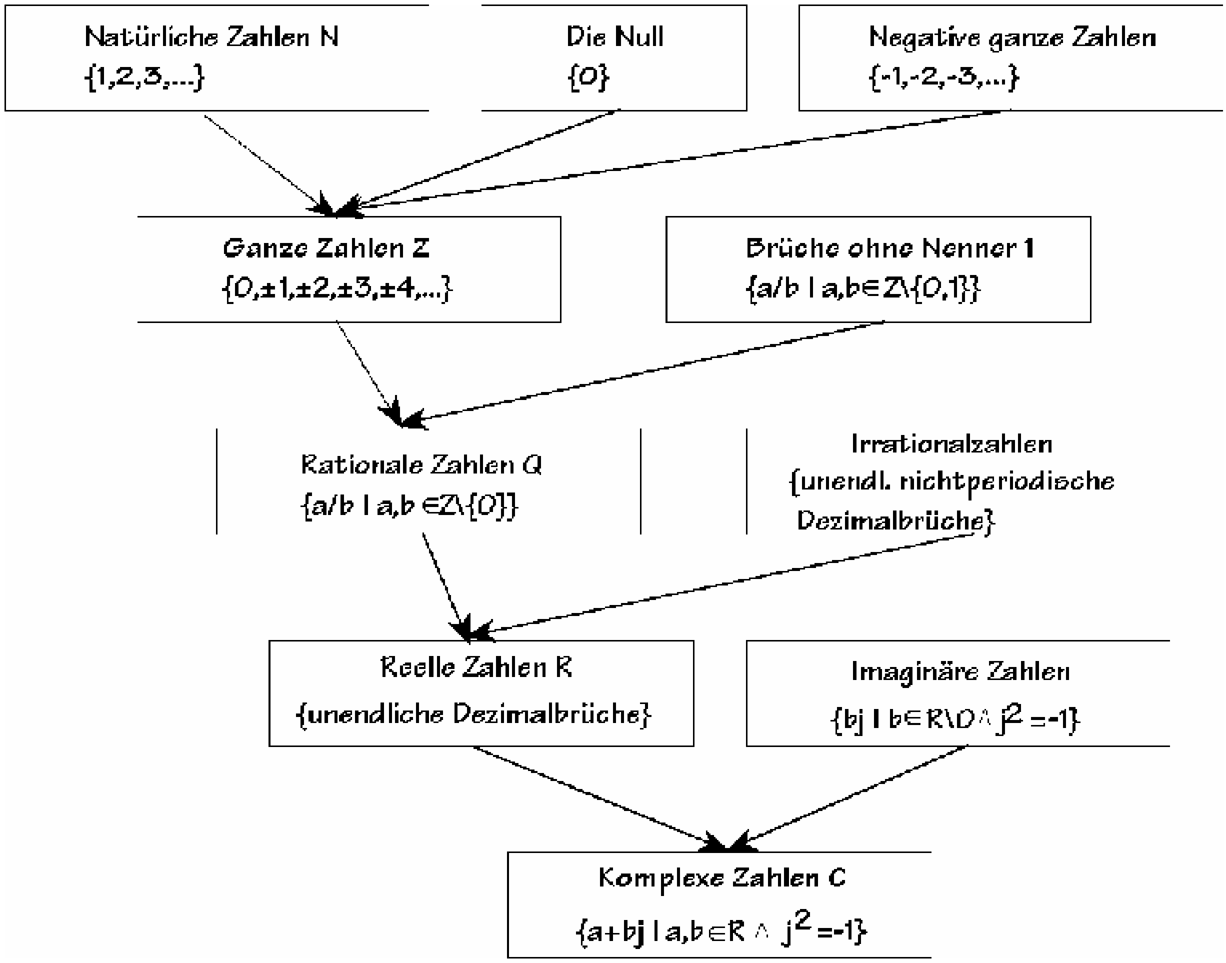


Abbildung 5 Übersicht über die verschiedenen Zahlbereiche

4 Der Bereich der natürlichen Zahlen

4.1 Rechenoperationen im Bereich der natürlichen Zahlen

Den Operationen mit endlichen Mengen entsprechen Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen.

4.1.1 Addition

Die Elementezahl s der Vereinigungsmenge S der beiden elementfremden endlichen Mengen A und B mit den Elementezahlen a und b heißt **Summe** der beiden Zahlen a und b und wird durch **a+b** bezeichnet:

$$S=A\cup B \text{ mit } A\cap B=\emptyset$$
$$s=a+b$$

← a und b heißen **Summanden**.
← Die Rechnung heißt **Addition**.
← Summe = Summand plus Summand.

Assoziationsgesetz (Vereinigungsgesetz):
$a+(b+c) = (a+b)+c$.

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz):
$a+b = b+a$.

Monotoniegesetz:
Aus $a<b$ folgt stets $a+c<b+c$.

4.1.2 Subtraktion

Ist für die beiden Zahlen a und b die Bedingung b+d=a erfüllbar, so heißt die durch sie eindeutig bestimmte Zahl d **Differenz** von a und b und wird mit **a-b** bezeichnet.

← In der Subtraktion d=a-b wird a **Minuend** und b **Subtrahend** genannt.
← Differenz = Minuend Minus Subtrahend.
← Die Rechnung heißt **Subtraktion**.

Wenn die endliche Menge B mit der Elementezahl b in der endlichen Menge A mit der Elementezahl a enthalten ist, so hat die Differenzmenge D die Elementezahl d=a-b:

$D=A\setminus B$ mit $B \subseteq A$
$s=a-b$

⌧ Das Assoziativgesetz gilt nicht: $(1-2)-3 \neq 1-(2-3)$!
⌧ Das Kommutativgesetz gilt nicht: $1-2 \neq 2-1$!

Monotoniegesetz:
Aus $a<b$ folgt stets $a+c<b+c$.

4.1.3 Multiplikation

Die Elementezahl p des Mengenprodukts P der beiden endlichen Mengen A und B mit den Elementezahlen a und b heißt Produkt der Zahlen a und b und wird durch $a \cdot b$ oder kurz ab bezeichnet:

$P=A\times B$
$p=a\cdot b$

← a und b heißen **Faktoren**.
← Die Rechnung heißt **Multiplikation**.

Assoziationsgesetz (Vereinigungsgesetz):
$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$.

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz):
$a\cdot b = b\cdot a$.

Distributionsgesetz (Verteilungsgesetz):
$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Monotoniegesetz:
Aus $a<b$ und $c>0$ folgt stets $a \cdot c < b \cdot c$.[12]

4.1.4 Division

Ist für die beiden Zahlen a und b die Bedingung $b \cdot c=a$ erfüllbar und $b \neq 0$, heißt die durch sie eindeutig bestimmte Zahl c **Quotient** aus a und b und wird mit a:b bezeichnet.

🡐 Im Quotienten wird a **Dividend**, b **Divisor** genannt.
🡐 Quotient = Dividend dividiert durch Divisor.
🡐 Die Rechnung heißt **Division**.

Von größter Bedeutung für praktische Rechnungen ist:[13]

Die Division durch <u>Null</u> ist per Definition <u>ausgeschlossen</u>.

Assoziationsgesetz (Vereinigungsgesetz):
$a:(b:c) = (a:b):c$.

⌧ Das Kommutativgesetz gilt nicht: $1:2 \neq 2:1$!
⌧ Das Distributivgesetz gilt nicht: $1:(2+3) \neq 1:2 + 1:3$)!

Monotoniegesetz:
Aus $a<b$ und $c>0$ folgt stets $a:c<b:c$.[14]

5 Der Bereich der ganzen Zahlen

5.1 Wesen und arithmetische Struktur

Der Bereich G der **ganzen** Zahlen wird von den Zahlen ..., *-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3*, ... gebildet. In diesem Bereich treten ***vorzeichenbehaftete*** Zahlen auf, über die zunächst einiges Grundsätzliches gesagt werden soll.

5.1.1 Vorzeichenregeln

Es ist stets:
a) $a+(-a)=0$.[15]
b) $-(-a) = a$.
c) $a+(-b) = a-b$.[16]
$a+(-b)+b=a$.

---

[12] Gilt nicht für c<0!
[13] Es gibt allerdings ernsthafte Diskussionsbeiträge, die „Unendlich“ als natürliche Zahl befürworten, womit die Division durch Null erlaubt sein könnte.
[14] Gilt nicht für c<0!
[15] Denn 0-a=-a ist nach Definition von 3.1.2 die Zahl, die zu a addiert Null ergibt.
[16] Denn a-b ist die Zahl, die zu b addiert a ergibt. Dieselbe Eigenschaft besitzt aber auch die Zahl a+(-b). (vgl. Regel a).

d) a-(-b) = a+b.[17]
e) -(a+b) = -a+(-b).[18]
f) -(a-b) = -a+b.[19]
g) a-(-b) = -ab.
h) $(-a)\cdot(-b) = -(-a)\cdot b = a\cdot b$.

6 Der Körper der rationalen Zahlen

6.1 Wesen der rationalen Zahlen

Alle Brüche g/h, die sich aus ganzen Zahlen g und h mit $h\neq 0$ (die Division durch Null ist in keinem Zahlenbereich möglich) bilden lassen, werden als rationale Zahlen oder gebrochene Zahlen bezeichnet. Die Menge K der rationalen Zahlen enthält die Menge G der ganzen Zahlen:

$$G \subset K.$$

Zwei Brüche g/h und g'/h' sind genau dann gleich, wenn gh'=g'h ist:

$$\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'} \Leftrightarrow gh' = g'h$$

Ein Bruch hat dann und nur dann den Wert Null, wenn sein Zähler gleich Null ist!

6.2 Die Menge der rationalen Zahlen als Zahlenkörper

Bei der Multiplikation zweier Brüche wird Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.

Bei der Division von Brüchen wird der Dividend mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert.

Zur Addition oder Subtraktion werden zwei rationale Zahlen zunächst so erweitert, daß sie einen gleichen Nenner, einen Hauptnenner, erhalten. Als Hauptnenner dient bekanntlich das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der beiden Nenner. Bei der Addition (Subtraktion) gleichnamiger Brüche (gleicher Nenner) werden deren Zähler addiert (subtrahiert) und der Nenner beibehalten.

Indem also im Bereich der rationalen Zahlen die vier Grundrechenarten bis auf die Division durch Null unbeschränkt ausführbar sind, ist ein in dieser Hinsicht vollendeter Zahlenbereich erreicht. Zahlenbereiche dieser Art werden **Zahlenkörper** genannt. Der Körperbegriff wird aber auch auf Mengen angewendet, die nicht nur aus Zahlen bestehen.

---

[17] Ersetzt man in der Regel c) die Zahl b durch (-b) folgt dann durch b) die Regel d).
[18] Oder nach c: (-a-b).
[19] Dies ergibt sich aus Regel e) unter Beachtung von b) und c).

Eine Menge M, unter deren Elementen eine Addition, eine Subtraktion, eine Multiplikation und eine Division mit den unter 3.1 genannten Grundgesetzen erklärt und bis auf die Division durch Null (=a-a für ein beliebiges a $\in$M) unbeschränkt ausführbar sind, heißt Körper.

Der Körper K der rationalen Zahlen ist der kleinste Zahlenkörper, der den Bereich der natürlichen Zahlen enthält.

7 Absolute Beträge und Abschätzungen

7.1 Absolute Beträge

Unter dem absoluten Betrag einer Zahl a, in Zeichen |a|, versteht man die nichtnegative der beiden Zahlen a und (-a). Hieraus ergeben sich die Folgerungen:

|a| ist niemals negativ!
Für jede Wahl des Vorzeichens gilt: ±a $\leq$|a|.
|-*a*| = |*a*|.

Der Betrag eines Produktes ist gleich dem Produkt aus den Beträgen der Faktoren:

|*a*$\cdot$*b*| = |*a*|$\cdot$|*b*|.

Der Betrag eines Quotienten ist gleich dem Quotienten aus den Beträgen von Dividend und Divisor:

|*a*:*b*| = |*a*|:|*b*|.

7.2 Abschätzungen

7.2.1 Allgemein

Für nichtnegative Zahlen a und b und jede beliebige natürliche Zahl n$\geq$0 gilt:

$$a^n + b^n \leq (a+b)^n$$

Dies folgt unmittelbar daraus, daß links nur die beiden Randglieder der Summenentwicklung von $(a+b)^n$ nach dem binomischen Lehrsatz stehen und keiner der vorkommenden Summanden negativ ist.

7.2.2 Bernoullische Ungleichung

Für jedes nichtnegative a und jede natürliche Zahl n gilt:

$$(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a$$

Hier sind rechts nur die beiden der nach dem binomischen Lehrsatz zu errechnenden Glieder aufgeschrieben während die übrigen nicht-negativ sind.

7.2.3 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Für beliebige n^2 Zahlen $a_1, a_2,..., a_n, b_1, b_2,..., b_n$ gilt die Ungleichung:[20]

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

7.2.4 Dreiecksungleichung

Der Betrag einer Summe ist niemals größer als die Summe der Beträge der Summanden:

$$|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$$

Der Beweis kann durch vollständige Induktion geführt worden.

8 Potenzen, Logarithmen

8.1 Potenzen mit rationalen Exponenten

Die einfachsten Potenzen sind solche mit natürlichen Zahlen als Exponenten, auf die weiter eingegangen wird.

Bei der Potenz a^n, ($n \in N \setminus \{0\}$) heißt a dabei **Basis**, n **Exponent** und a^n Potenzwert.

a^0 definiert man sinnvollerweise als 1: $a^0=1$

Die erste Erweiterung dieses Potenzbegriffes besteht in der Definition von Potenzen mit negativen ganzen Exponenten, bei denen die Basis $\neq 0$ sein muß. Ist $a \neq 0$ und (-n) eine negative ganze Zahl, so versteht man unter der Potenz a^{-n} den Wert $1/a^n$:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}; \qquad a \neq 0;\ n \in N \setminus \{0\}$$

Ist a eine positive reelle Zahl und g/n ($g \in G$, $n \in N \setminus \{0\}$) eine beliebige rationale Zahl, so versteht man unter $a^{\frac{g}{n}}$ die positive Zahl, deren n-te Potenz a^g ist. Statt $a^{1/n}$ darf auch $\sqrt[n]{a}$ geschrieben werden. Dieser Ausdruck wird n-te Wurzel aus a genannt.

Dabei heißen:

- n: Wurzelexponent,
- a: Radikand,
- $\sqrt[n]{a}$: Wurzelwert.

Für die Multiplikation, die Division und das Potenzieren der Potenzen gelten folgende **Potenzgesetze:**

---

[20] Hier ohne Beweis.

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert,
indem man ihre Exponenten addiert und die Basis beibehält:

$$a^s a^t = a^{s+t}$$

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert,
indem man ihre Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält:

$$a^s : a^t = a^{s-t}$$

Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen multipliziert und das Produkt mit dem gleichen Exponenten potenziert:[21]

$$a^s b^s = (ab)^s$$

Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert indem man ihre Basen dividiert und den Quotienten mit dem gleichen Exponenten potenziert:[22]

$$\frac{a^s}{b^s} = \left(\frac{a}{b}\right)^s$$

Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert
und die Basis der Potenz beibehält:

$$\left(a^s\right)^t = a^{s \cdot t}$$

Die letzten drei Potenzgesetze werden auch als Wurzelgesetze formuliert:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Eine Zusammenfassung von Potenzen bzw. Wurzeln durch Addition und Subtraktion ist nur möglich, wenn Basis und Exponent bzw. Radikand und Wurzelexponent übereinstimmen. Im Falle a^n-b^n gilt:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

mit dem Spezialfall

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Aus der Definition für Potenzen folgt für negative Basen:

---

21 Oder: ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor einzeln potenziert:
22 Oder: Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner einzeln potenziert.

$$\left.\begin{aligned}(-a)^{2n} &= a^{2n}\\ (-a)^{2n-1} &= -a^{2n-1}\end{aligned}\right\} a \in \Re_+, n \in Z$$

8.2 Rationalmachen des Nenners

Bei der numerischen Berechnung von Brüchen, deren Nenner Wurzeln als Irrationalzahlen sind, ist es zweckmäßig, vor dem Rechnen den Nenner in eine Rationalzahl zu verwandeln. Dies erspart die ungünstige Division durch einen Dezimalbruch als Näherungswert einer Irrationalzahl. Die Irrationalität des Nenners wird durch entsprechendes Erweitern beseitigt.

8.3 Potenzen von Binomen (binomischer Lehrsatz)

Sind $a,b \in \Re^*$ und $n \in N$, so läßt sich $(a+b)^n$ in eine Summe zerlegen:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Rechts stehen (n+1) Summanden, in deren Produkten die Exponenten von a mit n beginnend je um 1 nach rechts abnehmen, die von b umgekehrt mit 0 beginnend je um 1 zunehmen und die als Eulersche Symbole geschriebenen Binominalkoeffizienten $\binom{n}{k}$ (Sprechweise: n über k) aus den folgenden Definitionen heraus berechnet werden können:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(k-1)\cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad n \in \Re, k \in N$$ [23]

Hierbei gilt:

$$0! = 1;$$

$$\binom{n}{0} = 1;$$

$$\binom{n}{1} = n.$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Schreibt man für n=0,1,2, ... die Binomialkoeffizienten zeilenweise auf, so erhält man das unten dargestellte Pascalsche Zahlendreieck. In der rechts stehenden ausgerechneten Form läßt sich die Symmetrie der Zahlen zur Mittelsenkrechten der Zeilen und die Darstellung einer Zahl als Summe der links und rechts darüber stehenden erkennen. Damit kann das rechts stehende Zahlendreieck formal entwickelt werden.

---

[23] Sprechweise für k!: k Falkultät.

n=0:	1	$(a+b)^0=1$
n=1:	1 1	$(a+b)^1=a+b$
n=2:	1 2 1	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
n=3:	1 3 3 1	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
n=4:	1 4 6 4 1	$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
n=5:	1 5 10 10 5 1	$(a+b)^5=...$
n=6:	1 6 15 20 15 6 1	$(a+b)^6=...$
	usw.	

Abbildung 6 Pascalsche Zahlendreieck

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

Abbildung 7 Pascalsche Zahlendreieck mit Binomialkoeffizienten

8.4 Logarithmen reeller Zahlen

8.4.1 Definitionen und Gesetze

Vorausgesetzt, a>1 und b sind positive reelle Zahlen, so gibt es genau eine Zahl $n=\log_a b$, **Logarithmus b zur Basis a** genannt, die als Exponent zur Basis a genau b ergibt:

$$n = \log_a b \Leftrightarrow a^n = b; \quad a,b \in \Re_+$$ [24]

- 🡐 n ist der **Logarithmus.**
- 🡐 a ist die **Logarithmenbasis.**
- 🡐 b ist der **Numerus** des Logarithmus.

Aus der Definition folgt: Das Logarithmieren ist die Umkehrung des Potenzierens, und Logarithmieren und Potenzieren zur gleichen Basis heben sich auf:[25]

$$a^{\log_a b} = \log_a\left(a^b\right) = b$$

Weitere Folgerungen (a>1):

---

[24] Die Basen 0<a<1 werden selten benutzt.

[25] Anwendung von Funktion und Umkehrfunktion liefert immer die Variable: $\sqrt[3]{x^3} = x$

← $\log_a b=1$, wenn b=a (Basis gleich Numerus)
← $\log_a b>0$, wenn b>1
← $\log_a b=0$, wenn b=1
← $\log_a b<0$, wenn 0<b<1.

Auf Grund dieser Beziehungen kann jeweils durch Logarithmieren eine Rechenoperation mit reellen Zahlen auf eine darunterliegende „Operationsstufe“ zurückgeführt werden, also

← aus Potenzieren wird Multiplizieren
← aus Multiplizieren/Dividieren wird Addition/Subtraktion.

$$\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$$

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

$$\log_a u^m = m \log_a u$$

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u$$

8.4.2 Logarithmensysteme

Sämtliche Logarithmen (0<b<◎) zu einer bestimmten Basis a>0 werden als ein Logarithmensystem bezeichnet. Zwei Logarithmensysteme mit den Basen a und **c** sind durch die Beziehung

$$\boldsymbol{\log_a b = \log_a c \, \log_c b}$$

verknüpft. Für b=a folgt $\log_a c \, \log_c a=1$.

Die Logarithmen eines Systems können also in die Logarithmen eines beliebig anderen Systems umgerechnet werden. Als Ausgangssystem werden häufig die **natürlichen** Logarithmen mit der Basis a=e verwendet. Der sich ergebene Umrechnungsfaktor $M_c=\log_c e$ wird **Modul** des Systems c genannt, so daß für eine Umrechnung dann gilt:

$$\log_c b = M_c \ln b = \frac{\ln b}{\ln c}$$

Tabelle 6 Die in der Praxis gebräuchlichen Logarithmensysteme

Bezeichnung des Systems	Basis	Schreibweise	Modul M_c
Natürliche oder **Napiersche** Logarithmen	$e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\approx 2{,}71828$	ln b	$M_e = \frac{1}{\ln e} = 1$
Dekadische oder **Briggsche** Logarithmen	10	lg b	$M_{10} = \frac{1}{\ln 10} \approx 0{,}43429$
Dyadische Logarithmen	2	ld b	$M_2 = \frac{1}{\ln 2} \approx 1{,}443$

Zum numerischen Rechnen (außer Addition und Subtraktion) sind am besten die dekadischen Logarithmen geeignet, da deren Logarithmen von Zehnerpotenzen ganze Zahlen sind und sich jede

Zahl b durch Abspaltung einer Zehnerpotenz 10^n in $b=10^n$ b' mit $1 \le b' \le 10$ zerlegen läßt. lg b läßt sich dann wie folgt schreiben: lg b=n+lg b', wobei n als **Kennziffer** und die hinter dem Komma erscheinenden Stellen von lg b' in der Dezimalbruchschreibweise als **Mantisse** bezeichnet werden. In den Naturwissenschaften kommt dagegen fast ausschließlich der natürliche Logarithmus zum Einsatz, da für diesen Fall Umrechnungsfaktoren entfallen; naturwissenschaftliche Prozesse folgen häufig der Exponentialfunktion zur Basis e.

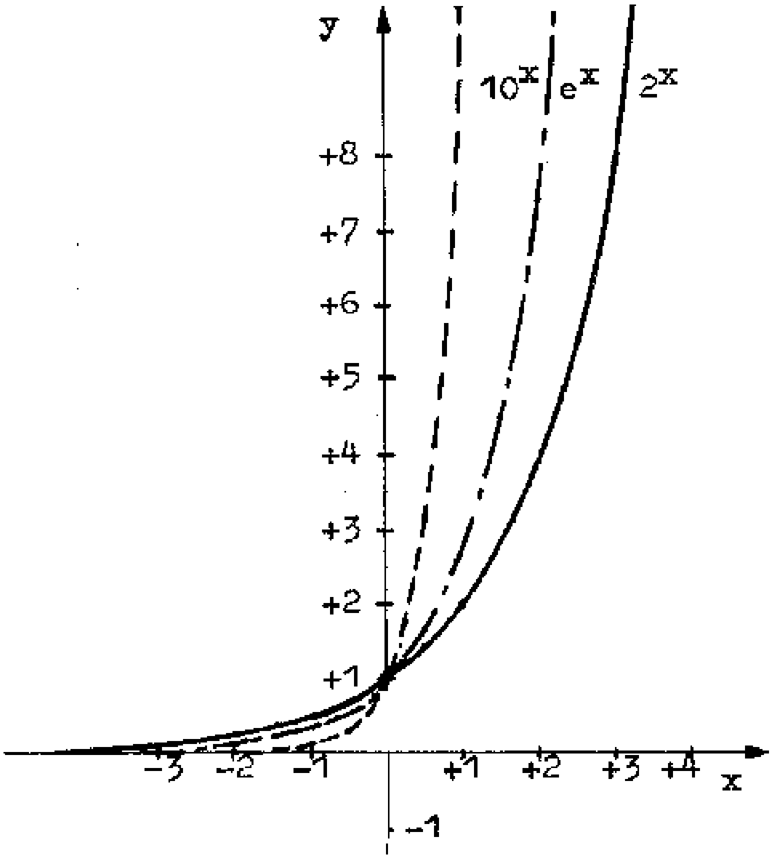


Abbildung 8 Darstellung ausgewählter Exponentialfunktionen

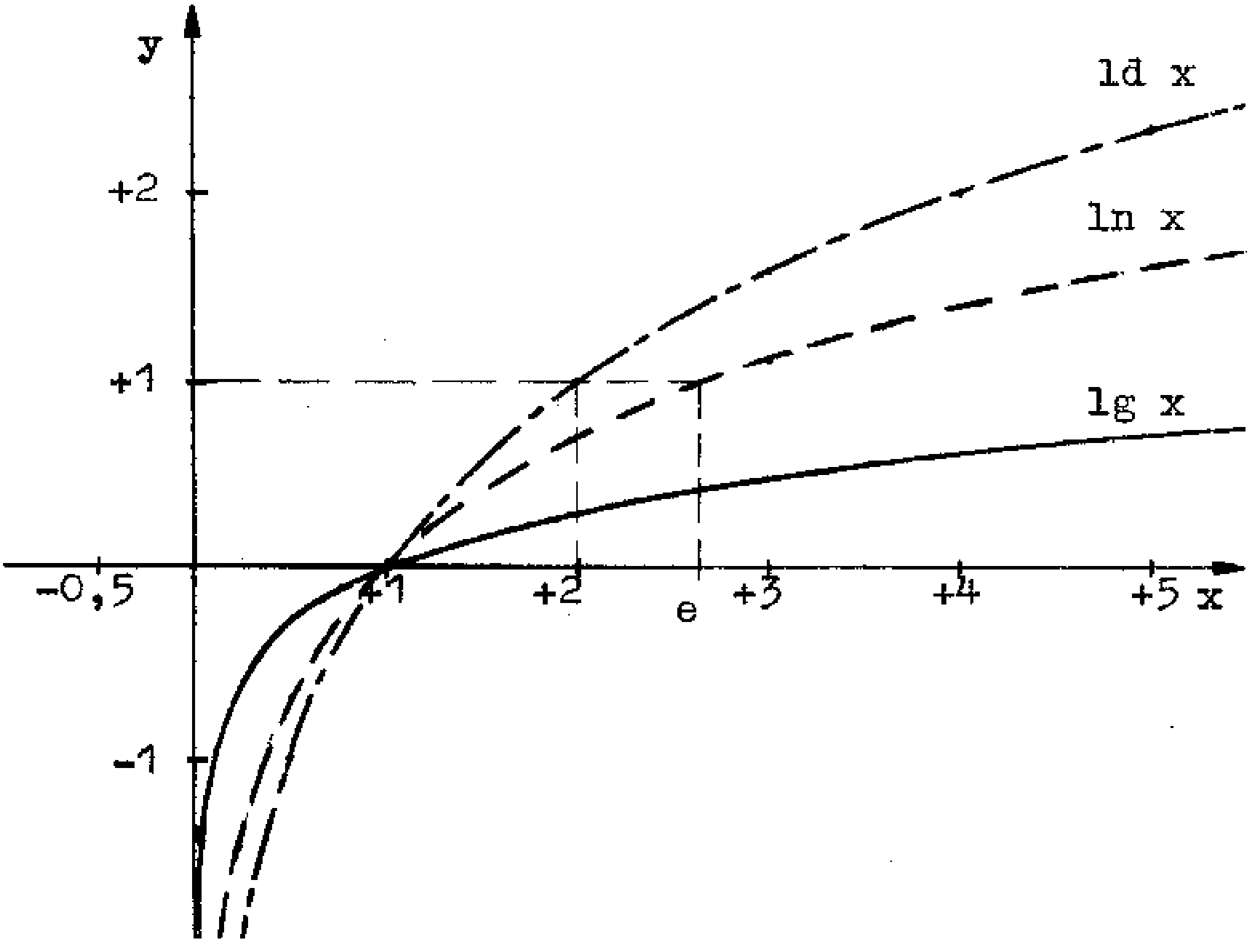


Abbildung 9 Darstellung ausgewählter Logarithmusfunktionen (Umkehrung der Exponentialfunktionen)